



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3-6-2026 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑ-

ΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π.

ΘΕΜΑ Α

A.1. Σχολικό σελίδα 133

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι:

- Αν $x_1 = x_2$ τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ①.

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε λόγω της ① είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

A.2. Σχολικό σελίδα 51

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

A.3. Σχολικό σελίδα 185

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

A.4. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2 \ln(x - 1)$

$g : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x - 2} + 1$

B.1. Για την συνάρτηση $h = f \circ g$.

$$\begin{aligned} A_{f \circ g} &= \{x \in A_g : g(x) \in A_f\} = \{x \geq 2 : \sqrt{x - 2} + 1 > 1\} = \\ &= \{x \geq 2 : \sqrt{x - 2} > 0\} = \{x \geq 2 : x - 2 > 0\} = \\ &= \{x \geq 2 : x > 2\} = (2, +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x - 2} + 1) = 2 \ln(\sqrt{x - 2} + 1 - 1) = \\ &= 2 \ln(\sqrt{x - 2}) = \ln(x - 2) \end{aligned}$$

B.2. $h(x) = \ln(x - 2), x \in (2, +\infty)$

Για κάθε $x_1, x_2 \in A_h$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \xrightarrow{\ln \uparrow} \ln(x_1 - 2) < \ln(x_2 - 2) \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα $h \uparrow$ στο διάστημα $(2, +\infty)$ άρα h 1-1, άρα h αντιστρέφεται.

β' τρόπος

Για κάθε $x_1, x_2 \in A_h$ με $h(x_1) = h(x_2)$ έχουμε:

$$h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \ln(x_1 - 2) = \ln(x_2 - 2) \xleftrightarrow{\ln \text{ 1-1}} x_1 - 2 = x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα h 1-1, άρα h αντιστρέφεται.

γ' τρόπος

Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για $x > 2$ με

$$h'(x) = [\ln(x - 2)]' = \frac{1}{x - 2} \cdot (x - 2)' = \frac{1}{x - 2} > 0 \text{ για } x \in (2, +\infty)$$

Άρα $h \uparrow$ στο διάστημα $(2, +\infty)$ άρα h 1-1, άρα h αντιστρέφεται.

Για την εύρεση της αντίστροφης, θέτουμε $y = h(x)$.

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln(x - 2) \xleftrightarrow{e^x \text{ 1-1}} e^y = e^{\ln(x - 2)} \Leftrightarrow e^y = x - 2 \Leftrightarrow x = e^y + 2, x \in A_h$$

Έχουμε $x > 2 \Leftrightarrow e^y + 2 > 2 \Leftrightarrow e^y > 0$ που ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$, άρα $A_{h^{-1}} = \mathbb{R}$.

Επομένως $h^{-1}(y) = e^y + 2$ με $y \in \mathbb{R}$ άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

β' τρόπος

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα

$$h((2, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) =$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2), \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x - 2) \right) = \mathbb{R} \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) \stackrel{u=x-2}{\substack{x \rightarrow 2^+ \\ u \rightarrow 0^+}} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty \text{ \acute{a}\rho\alpha } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x - 2) \stackrel{v=x-2}{\substack{x \rightarrow +\infty \\ v \rightarrow +\infty}} \lim_{v \rightarrow +\infty} \ln v = +\infty$$

B.3.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\ln(x - 2) \cdot \frac{2 \ln(x - 1)}{x - 2} \right) \stackrel{(-\infty) \cdot 2}{=} -\infty \text{ αφο\acute{u}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \ln(x - 1)}{x - 2} &\stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 \ln(x - 1))'}{(x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \frac{1}{x - 1} \cdot (x - 1)'}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x - 1} = 2 \text{ και} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0 \text{ \acute{a}\rho\alpha } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) \stackrel{u=x-2}{\substack{x \rightarrow 2^+ \\ u \rightarrow 0^+}} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1.

ι) Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ οπότε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός.

$$\text{\textbackslash} \text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}.$$

$$\text{Αν } \kappa \neq 0 \text{ \acute{e}\chi\omicron\upsilon\mu\epsilon } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = \begin{cases} -\infty, & \kappa < 0 \\ +\infty, & \kappa > 0 \end{cases} \text{ \acute{a}\tau\omicron\pi\omicron.}$$

$$\text{Αν } \kappa = 0 \text{ \acute{e}\chi\omicron\upsilon\mu\epsilon } \text{ \acute{o}\tau\iota } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x}{x^2 + 1} = 0 \text{ για κάθε } \mu \in \mathbb{R}$$

\acute{a}\rho\alpha η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ιι) Η $y = x$ εφ\acute{a}\pi\tau\epsilon\tau\alpha\iota της γραφικής παράστασης της f στην αρχή των αξόνων \acute{a}\rho\alpha $f(0) = 0$ που ισχύει και $f'(0) = 1$.

Έχουμε

$$f'(x) = \frac{(\mu x)'(x^2 + 1) - (\mu x)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu(x^2 + 1) - (\mu x)2x}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu - \mu x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Άρα $f'(0) = \mu \Rightarrow \mu = 1$

Γ.2. Έχουμε $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

ι) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} > 0 \Rightarrow -x^2 + 1 > 0 \Rightarrow x \in (-1, 1)$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} < 0 \Rightarrow -x^2 + 1 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	\circ	$+$	\circ	$-$
f	\searrow	ΤΟΠ.ΕΛ.	\nearrow	ΤΟΠ.ΜΕΓ.	\searrow

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = -1$ το $f(-1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$ και ολικό

μέγιστο στο $x = 1$ το $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

ιι) Για $A_1 = (-\infty, -1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left(-\frac{1}{2}, 0 \right)$$

$$\text{Διότι } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Για $A_2 = [-1, 1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{Διότι } f(-1) = \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Για $A_3 = (1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x)\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Επομένως } f(D_f) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Για την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ έχουμε:

Αν $\alpha \neq 0$ είναι $\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \alpha^2 > \frac{1}{2} = f_{\max}$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Αν $\alpha = 0$ είναι $f(x) = \frac{1}{2}$ οπότε μοναδική ρίζα η $x = 1$.

Γ.3.

$$\left. \begin{aligned} I_\nu &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx \quad \textcircled{1} \\ I_{\nu+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1} dx \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} I_\nu + I_{\nu+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+1+2}}{x^2+1} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} \cancel{(1+x^2)}}{\cancel{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^{2\nu+1} dx = \left[\frac{x^{2\nu+1+1}}{2\nu+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \xrightarrow{\nu=0} I_0 &= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+1) \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} (\ln(1+1) - \ln(0+1)) = \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$$

για $\nu = 0$ έχουμε

$$\left. \begin{aligned} I_0 + I_1 &= \frac{1}{2 \cdot 0 + 2} = \frac{1}{2} \\ I_0 &= \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

για $\nu = 1$ έχουμε

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 \Leftrightarrow I_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Έστω $h(x) = g(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$

Η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πράξεις συνεχών, αφού $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} h(-1) = g(-1) - 1 < 0 \\ h(0) = g(0) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(-1) \cdot h(0) < 0$$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0$.

Έστω ότι υπάρχει $x_2 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $h(x_2) = 0$.

Έστω $x_1 < x_2$.

- Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) .
- $h(x_1) = h(x_2) = 0$

Από θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0$.

$h'(x) = g'(x) + 1$ άρα $g'(\xi) + 1 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = -1$ άτοπο, αφού $g'(x) \neq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τελικά υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$.

β' τρόπος

Έστω $h(x) = g(x) + x$ συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων με $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$ διότι $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $g(-1) < 1 \Rightarrow g(-1) - 1 < 0$ και $h(0) = g(0) > 0$. Άρα $h(-1) \cdot h(0) < 0$, επομένως από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοια ώστε $g(x_1) + x_1 = 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ αφού $g'(x) \neq -1$ και επειδή η g έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και h' είναι συνεχής, οπότε διατηρεί πρόσημο, άρα η h είναι γνησίως μονότονη, άρα 1-1, οπότε η $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την x_1 .

Δ.2. Αφού f παραγωγίσιμη στο A_f άρα και στο $x_0 = 0$, άρα θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x(g(x) + x) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x} - \frac{\kappa x}{x} \right) = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa = \\ &= 2 \cdot 1 + 1 - \kappa = 3 - \kappa \end{aligned}$$

Άρα $3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3$

Δ.3. Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$ συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) - (\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \geq 0 \end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$x \geq 0 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0$$

Έχουμε την εξίσωση $3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ έτσι

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) = 2 \cdot 1 + \infty - 3 \frac{\pi}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \epsilon\phi x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$$

Άρα

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$$

$\frac{\pi}{3} \in f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ άρα υπάρχει $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ η ρίζα είναι μοναδική.

Δ.4.

ι) Η h είναι συνεχής στο $(x_1, 0]$ και δεν έχει ρίζες γιατί η x_1 είναι η μοναδική ρίζα.

Άρα η h διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$$h(0) = g(0) > 0 \text{ γιατί } 0 < g(x) < 1, x \in \mathbb{R}$$

Άρα $h(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, 0]$ οπότε $h(x) \geq 0$ για $x \in [x_1, 0]$.

Αφού $f(x) = x^2 \cdot h(x)$ για $x \in [x_1, 0]$ και $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$ και $h(x) \geq 0$ για $x \in [x_1, 0]$, τότε και $f(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$.

ii) Έστω Ω_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = x_1$ και $x = 0$.

Έστω Ω_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = f(x_2) = \frac{\pi}{3}$.

Λόγω της συνέχειας της f στο διάστημα $\left[x_1, \frac{\pi}{3}\right]$ και αφού $f(x) \geq 0$ στο ίδιο διάστημα, έχουμε ότι $E(\Omega_1) = \int_{x_1}^0 f(x) dx$ και $E(\Omega_2) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$.

Αφού $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \left[x_1, \frac{\pi}{3}\right]$, τότε $E(\Omega) = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$, και αφού ο άξονας $y'y$ χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ίσα χωρία Ω_1 και Ω_2 , ισχύει

$$\int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \quad (1)$$

Παίρνουμε το κάθε μέλος της (1) ξεχωριστά.

$$\int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_{x_1}^0 x^2(g(x)+x) dx = \int_{x_1}^0 x^2g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx = \int_{x_1}^0 x^2g(x) dx - \frac{x_1^4}{4}$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$ έχουμε, αφού $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} = -(\ln(\sigma\upsilon\nu x))'$ για $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \quad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2) προκύπτει:

$$\int_{x_1}^0 x^2g(x) dx - \frac{x_1^4}{4} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \boxed{\int_{x_1}^0 x^2g(x) dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4}}$$

Για το ζητούμενο ολοκλήρωμα έχουμε, αφού $g(x_1) = -x_1$:

$$\begin{aligned}
 \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx &= [x^3 g(x)]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 3x^2 g(x) dx = [x^3 g(x)]_{x_1}^0 - 3 \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx = \\
 &= -x_1^3 g(x_1) - 3 \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx = x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx = \\
 &= x_1^4 - 3 \left(1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4} \right) = \\
 &= x_1^4 - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} - \frac{3x_1^4}{4} = -3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} + \frac{x_1^4}{4}
 \end{aligned}$$